

# MODELO CINEMÁTICO DE UN VEHÍCULO AUTÓNOMO

J.M. Pinna Cortiñas,<sup>\*\*</sup><sup>1</sup> Favio Masson\*  
Osvaldo Agamennoni\*

\* *III E - Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, BA,  
Argentina*

\*\* *CONICET - Universidad Nacional del Sur, Bahía  
Blanca, BA, Argentina, martin.pinna@ceia.uns.edu.ar*

Resumen: En este trabajo se presenta el modelo cinemático de un vehículo en el plano a partir de sus características geométricas y de datos experimentales obtenidos para este fin. El modelo es uno que considera incertidumbres y será utilizado en otros trabajos para aplicaciones de navegación y control autónomo.

Keywords: Kalman extendido, modelo cinemático, sensores.

## 1. INTRODUCCIÓN

La navegación y el control de vehículos no tripulados sigue siendo un desafío para los investigadores. Si se analiza el problema de construir en forma consistente un mapa y a la vez utilizarlo para localizar al vehículo, (SLAM por sus siglas en inglés) se puede afirmar que está formulado y resuelto en términos teóricos. (Dissanayake *et al.*, 2001; Castellanos *et al.*, 1997; Julier and Uhlmann, 2001; Wang *et al.*, 2003). Sin embargo desde el punto de vista práctico quedan cuestiones que son necesarias resolver para obtener una solución *práctica*. Cuestiones como la riqueza del mapa, la velocidad del móvil, las características del ambiente y la necesidad de volver a visitar el lugar desde donde se partió para mantener acotadas las incertidumbres son parte de este problema.

En términos del control o guiado de los vehículos en ambientes grandes e inciertos, el problema es aún más desafiante. En este tipo de ambientes no estructurados es necesario desarrollar un planeamiento de trayectorias incremental (Lambert and Fort-Piat, 2000) donde cabe la utilización de

esquemas como el SLAM que va construyendo la información del ambiente también de esta forma (Rezaei *et al.*, 2003).

Este trabajo se desarrolla como el primer paso del objetivo que significa lograr el control de un vehículo autónomo en ambientes externos utilizando para esto información densa generada desde la navegación (Masson *et al.*, 2005). El modelo necesario es del tipo cinemático y la primera aproximación que se realiza es mediante un modelo válido en el plano. En este trabajo se presentarán las ecuaciones cinemáticas continuas, deducidas a partir de la geometría del problema y comunes en la literatura (Julier, 1997), para luego discretizarlas con el fin de poder emplearlas en un filtro de Kalman extendido. El sintonizado del modelo es a partir de información experimental obtenida mediante sensores de dirección, de velocidad y de posición. Finalmente, el modelo se valida mediante parte de la información experimental disponible no utilizada en la sintonía del modelo.

---

<sup>1</sup> martin.pinna@ceia.uns.edu.ar

## 2. MODELO CINEMÁTICO CONTINUO

En la Fig 1 se muestra un esquema de un vehículo de cuatro ruedas junto con los sensores de velocidad y de posición. Además se incluye sobre el esquema un modelo de dos ruedas o de tipo bicicleta (Julier, 1997), que consiste en dos ruedas virtuales y un marco, como muestra la Fig. 2 donde  $\psi$  es el ángulo que forma el marco de la bicicleta con la recta vertical,  $\delta$  es el ángulo de dirección,  $G$  es el centro de gravedad,  $r$  es la distancia de la rueda delantera al centro instantáneo de rotaciones,  $r_r$  es la distancia de la rueda trasera al mismo centro,  $x$  e  $y$  son las coordenadas cartesianas,  $B$  es la distancia entre el eje delantero y trasero,  $W$  es la distancia entre las ruedas traseras y  $V_r$  es la velocidad de la rueda trasera.

Para obtener un modelo cinemático que describa la trayectoria de la rueda trasera, se parte de la obtención de las velocidades como

$$\dot{x}_r = V_r \cos(\psi), \quad (1)$$

$$\dot{y}_r = V_r \sin(\psi), \quad (2)$$

además se observa que  $B = r \sin(\delta)$  y por trigonometría se deduce que

$$\dot{\psi} = \frac{V_r}{B} \tan(\delta). \quad (3)$$

Para facilitar desarrollos posteriores se traslada el modelo, que actualmente se encuentra sobre la rueda trasera, al punto donde se encuentra el sensor de posición o GPS. A partir de la Fig. 3 y de las Ecs. 1 y 2 se deduce que

$$x_{GPS} \dot{} = V_r \left[ \cos(\psi) - (a \sin(\psi) + b \cos(\psi)) \frac{\tan(\delta)}{B} \right], \quad (4)$$

$$y_{GPS} \dot{} = V_r \left[ \sin(\psi) + (a \cos(\psi) - b \sin(\psi)) \frac{\tan(\delta)}{B} \right]. \quad (5)$$

## 3. MODELO CINEMÁTICO DISCRETO

A partir del modelo deducido en las Ecs. 1, 2 y 3 se deduce un modelo discreto empleando la regla de Euler. Se supone que el paso de discretización toma un valor  $\Delta t$  y las ecuaciones resultan

$$x_{GPS}(k+1) = x_{GPS}(k) + \Delta t V_r(k) \cdot \left[ \cos(\psi(k)) - (a \sin(\psi(k)) + b \cos(\psi(k))) \frac{\tan(\delta(k))}{B} \right] \quad (6)$$

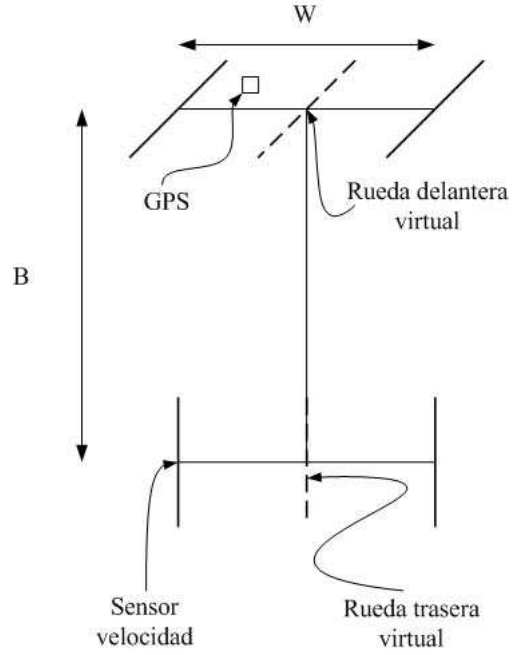


Figura 1. Vehículo, sensores y modelo tipo bicicleta.

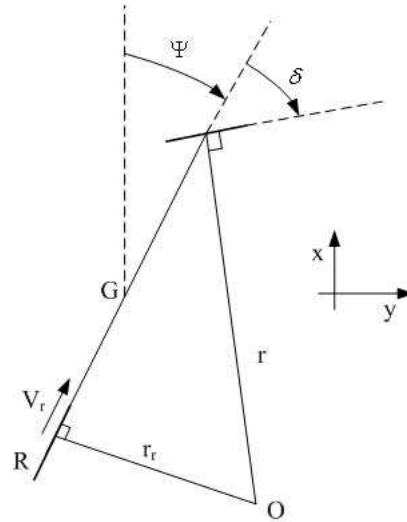


Figura 2. Modelo tipo bicicleta.

$$y_{GPS}(k+1) = y_{GPS}(k) + \Delta t V_r(k) \cdot \left[ \sin(\psi(k)) + (a \cos(\psi(k)) - b \sin(\psi(k))) \frac{\tan(\delta(k))}{B} \right], \quad (7)$$

$$\psi(k) = \frac{V_r(k)}{B} \tan(\delta(k)), \quad (8)$$

donde las entradas a este sistema son: la velocidad de la rueda trasera  $V_r$  y el ángulo del volante  $\delta$ .

## 4. EL FILTRO DE KALMAN

En esta sección se presentan las ecuaciones del filtro de Kalman extendido sin ser demostradas

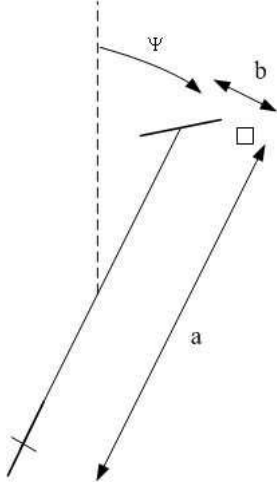


Figura 3. Traslación del modelo al punto de observación o posición del GPS.

(Jazwinski, 1973). La elección del filtro extendido se basa en que las Ecs. 6, 7 y 8 representan un sistema discreto no lineal. El filtro trabaja en forma recursiva en dos etapas: primero se realizan predicciones y cuando aparece una observación se realiza una actualización. Para un sistema

$$x(k) = f(x(k-1), u(k), v(k), k), \quad (9)$$

$$z(k) = h(x(k), w(k)), \quad (10)$$

donde  $x$  es el vector de estados,  $f$  y  $h$  son funciones no lineales,  $u$  es la entrada al sistema y  $v$  y  $w$  son las incertidumbres de los estados y las observaciones respectivamente que se suponen Gaussianos, temporalmente no correlacionados y con media cero. La primera etapa consiste en calcular las predicciones  $\hat{x}(k|k-1)$  en el instante  $k$  junto con su covarianza  $P(k|k-1)$  de la siguiente manera

$$\hat{x}(k|k-1) = f(\hat{x}(k-1|k-1), u(k)), \quad (11)$$

$$P(k|k-1) = \nabla f_x(k)P(k-1|k-1)\nabla^T f_x(k) + \nabla f_v Q(k)\nabla^T f_v, \quad (12)$$

hasta que se produzca una observación  $z(k)$  en el instante  $k$  y se calculan las actualizaciones de la estimación  $\hat{x}(k|k)$  y de la covarianza  $P(k|k)$  de la siguiente manera

$$\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + W(k)[z(k) - h(\hat{x}(k|k-1))], \quad (13)$$

$$P(k|k) = P(k|k-1) - W(k)S(k)W(k)^T, \quad (14)$$

$$W(k) = P(k|k-1)\nabla^T h_x S^{-1}(k), \quad (15)$$

$$S(k) = \nabla h_x(k)P(k|k-1)\nabla^T h_x(k) +$$

$$+\nabla h_w R(k)\nabla^T h_w, \quad (16)$$

donde las matrices  $Q$  y  $R$  representan la covarianza de la estimación de los estados y de las observaciones,

$$Q = E(vv^T), \quad (17)$$

$$R = E(ww^T). \quad (18)$$

#### 4.1 Incertidumbres

A partir de los datos del GPS utilizado se deduce que  $R$  toma un valor de  $R = \text{diag}(5, 5)$ , además, se supone que la matriz  $Q$  toma un valor inicial de  $Q = \text{diag}(2, 2, 0,04)$ . Los valores tienen que ver con las características de las señales de entrada e incertidumbres asociadas a las simplificaciones en el modelo. Debido a que no se dispone de un modelo dinámico del ruido de modelo se supone que el gradiente  $\nabla f_v$  toma un valor unitario y en forma análoga se procede con  $\nabla h_w$ .

#### 4.2 Modelo de predicción y observación

A partir del modelo discreto del sistema dado por las Ecs. 6, 7 y 8 resulta un modelo de predicción linealizado de la siguiente manera

$$\nabla f_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

donde los elementos  $a_{13}$  y  $a_{23}$  están dados por  $a_{13} = \Delta t V_r(k-1) \{-\text{sen}(\psi(k-1)) + [-a \cos(\psi(k-1)) + b \text{sen}(\psi(k-1))] \tan(\delta(k-1))/B\}$ ,  $a_{23} = \Delta t V_r(k-1) \{\cos(\psi(k-1)) + [-a \text{sen}(\psi(k-1)) - b \cos(\psi(k-1))] \tan(\delta(k-1))/B\}$ . Además,  $\nabla h_x = \text{diag}(1 \ 1)$ .

#### 4.3 Condiciones iniciales

Para la matriz  $P$  se toma como condición inicial el valor  $P(0|0) = 10Q$ . En el caso del vector de estados se considera  $x(0) = [0 \ 0 \ \psi(0)]^T$  donde  $\psi(0)$  es la orientación inicial del vehículo.

#### 4.4 Mediciones

Las mediciones que se realizan incluyen la entrada  $u$  o sea la dirección  $\delta$  y la velocidad de la rueda trasera izquierda  $V_r$  como también la posición del vehículo mediante un GPS en modo diferencial (ubicado sobre el farol delantero izquierdo). Estos sensores fueron montados en un vehículo y los datos tomados en un ambiente como el que muestra la figura 4. En el caso de las entradas



Figura 4. Vehículo y ambiente donde se realizaron las experimentaciones.

las mediciones se producen cada 0,022 s mientras que las observaciones se realizan en promedio cada 0,2 s. Esta diferencia en los tiempos implica que se realizarán predicciones hasta que se produzca una observación, instante en el cual se realiza una actualización mediante las Ecs. 13 a 16.

## 5. IDENTIFICACIÓN

En las Ecs. 6 a 8 se observa que el parámetro desconocido en el modelo es la variable  $B$ . Si bien este es un parámetro geométrico que podría llegar a obtenerse mediante medición directa, es de interés dejar el mismo como una variable a identificar. Esto se debe a que el modelo empleado es simplificado en el sentido que modela el movimiento con dos ruedas cuando en realidad el vehículo es de cuatro. De esta forma se le otorga al modelo un grado de libertad.

Con el fin de identificar esta constante se realiza una rutina que se encarga de hallar el valor óptimo de esta variable. La información experimental recolectada incluye las entradas al sistema: la velocidad  $V_r$  que se muestra en la Fig. 5, la dirección de la rueda delantera  $\delta$  que se indica en la Fig. 6 y la posición del vehículo mediante GPS. Para esto se define una función objetivo a optimizar que consiste en el error cuadrático entre las estimaciones que se obtienen mediante el filtro de Kalman y las observaciones. La rutina de optimización encuentra mínimos locales y dentro de estos mínimos locales, el mínimo global se encuentra para  $B = 2,76$  y los resultados obtenidos de comparar las predicciones y las estimaciones se muestran en la Fig. 7, mientras que una ampliación que muestra las observaciones, las mediciones y las predicciones puede verse en la Fig. 8.

El comportamiento observado es muy bueno ya sea en la Fig. 7, donde las predicciones y las estimaciones se encuentran superpuestas, como en la Fig. 8 donde se percibe que las estimaciones se encuentran entre las predicciones y las observaciones. Esto indica un buen comportamiento del filtro de Kalman ya que el mismo se encuentra

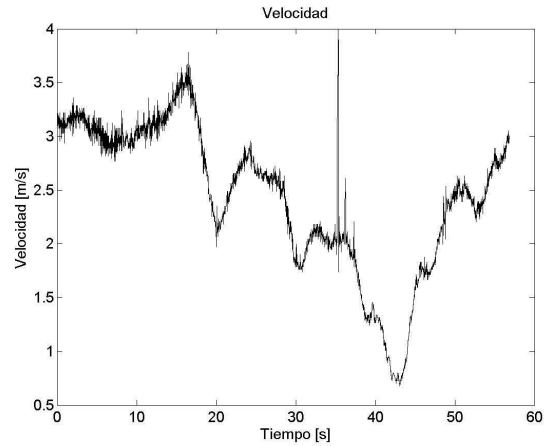


Figura 5. Velocidad del vehículo. Una de las entradas al sistema.

realizando una ponderación entre las predicciones y las observaciones y además se aprecia que cuando se produce una observación, se produce una corrección en las predicciones.

Es interesante notar que el filtro se encuentra funcionando también como un observador. Esto se debe a que no se está realizando una medición del ángulo  $\psi$  y los valores que se obtienen de esta variable son una inferencia que se obtiene a partir del modelo y de las observaciones de posición. En la Fig. 9 se observa como el ángulo toma inicialmente un valor ligeramente negativo, luego se incrementa cuando el vehículo rota en sentido antihorario y se incrementa hasta tomar valores positivos del orden de 2.7 rad que corresponden a la trayectoria final del vehículo.

## 6. VALIDACIÓN DEL MODELO

Se utilizó parte de la información adquirida con el fin de validar el modelo hallado con información distinta de la empleada para sintonizar el modelo. Para esto se toma el punto desde el cual se dejó de ajustar el modelo en la Fig. 7 como condición inicial. Este punto se traslada hasta el origen y la condición inicial para el ángulo  $\psi$  es  $\psi_0 = 2,52$ .

La forma de validar el modelo es fijar la variable  $B$  en el valor hallado mediante optimización en  $B = 2,76$ . En la Fig. 10 se aprecia que tanto la predicción como la estimación del modelo se aproximan claramente a las observaciones, lo que indica un buen comportamiento del modelo ajustado. Se observa en esta figura como en la Fig. 8 que se realizan varias aproximaciones hasta que se produce una observación y en este instante se produce la actualización que conduce a una corrección en la predicción.

El hecho de que se produzcan varias predicciones antes de que aparezca una actualización se debe

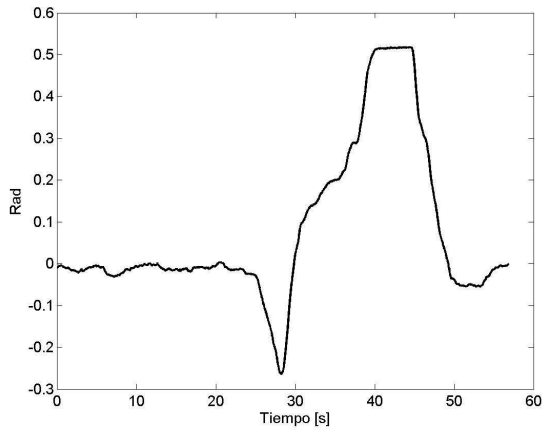


Figura 6. Dirección de las ruedas delanteras  $\delta$ . Otra de las entradas al sistema.

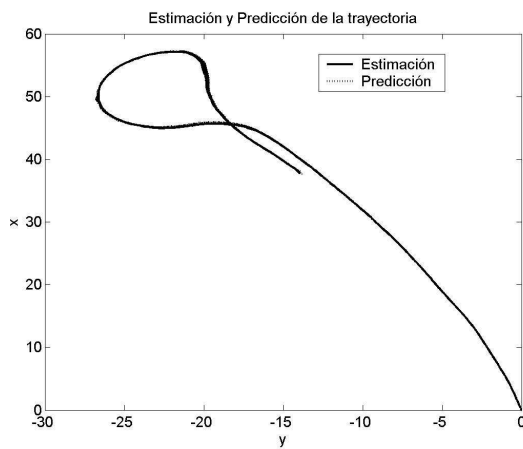


Figura 7. Estimaciones y predicciones obtenidas mediante el filtro extendido de Kalman para  $B = 2,76$ .

a la naturaleza asincrónica de los datos. Los sensores de dirección y velocidad que constituyen la entrada  $u$  al sistema se encuentran midiendo más rápido que el GPS. Esto explica porqué aparecen en la Fig. 10 varias predicciones y luego una observación.

Por último se analizó la sintonía del filtro extendido de Kalman en términos de las matrices de varianza de ruido de modelo y observación. Este análisis se hizo a partir de la innovación cuadrática normalizada donde se observó que los valores adoptados son los adecuados.

## 7. CONCLUSIONES

Se presentó un modelo cinemático continuo de un vehículo de cuatro ruedas común en la literatura. Luego se lo discretizó mediante la regla de Euler con el objetivo de utilizar un filtro de Kalman extendido asincrónico. La información experimental de las entradas al sistema: dirección de las ruedas delanteras y velocidad se combinó con las

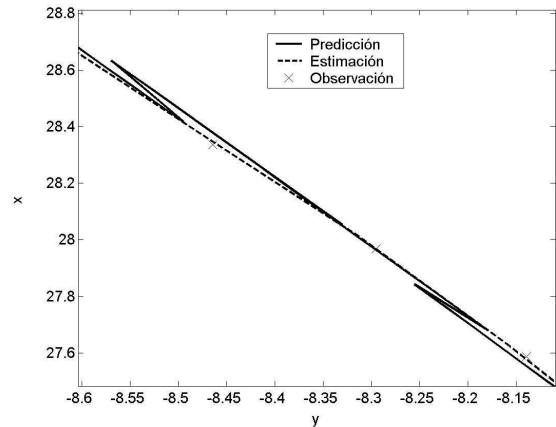


Figura 8. Estimaciones, predicciones y observaciones para  $B = 2,76$ .

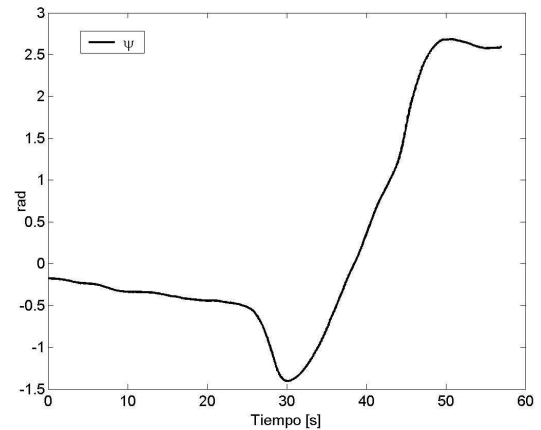


Figura 9. Observación del ángulo  $\psi$  para  $B = 2,76$ .

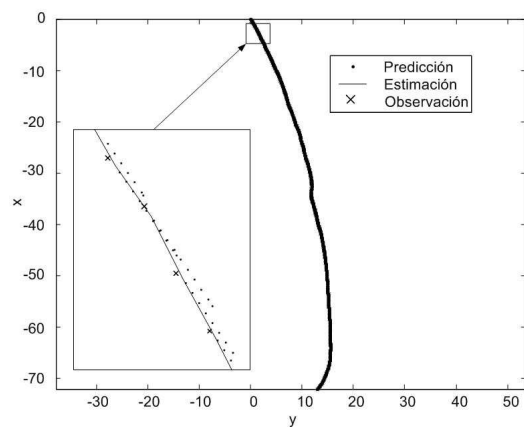


Figura 10. Tramo de validación para  $B = 2,76$ . Predicción, estimación y observación junto con una ampliación.

observaciones de posición con el fin de sintonizar el modelo.

El valor de la constante  $B$  hallada tiene sentido físico ya que el valor al que debería converger es 2.82 (suponiendo que el valor verdadero es la distancia real entre ejes). Las diferencias pueden deberse a imprecisiones en el modelo propuesto ya que en realidad el vehículo tiene cuatro ruedas y no dos como se modela en definitiva.

A continuación se validó el modelo con información distinta de la que se utilizó en el ajuste. En este caso se observó que el modelo sigue funcionando fuera de la zona en la que se realizó el ajuste lo que permite confiar en el modelo hallado.

## 8. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo a sido financiado por la Universidad Nacional del Sur (PGI 24/ZK15 y PGI 24/K030) y el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

## REFERENCIAS

- Castellanos, J.A., J.D. Tardós and G. Schmidt (1997). Building a global map of the environment of a mobile robot: The importance of correlations. *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, ICRA '97* pp. 1053–1059. Albuquerque, New Mexico, USA.
- Dissanayake, M. W. M. G., P. M. Newman, H. F. Durrant-Whyte, S. Clark and M. Csorba (2001). A solution to the simultaneous localization and map building (slam) problem. *IEEE Transactions on Robotic and Automation* **17**(3), 229–241.
- Jazwinski, A. H. (1973). *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press.
- Julier, Simon J. (1997). Process Models for the Navigation of High-Speed Land Vehicles. PhD thesis. Oxford.
- Julier, S.J. and J.K. Uhlmann (2001). A counter example to the theory of simultaneous localization and map building. In: *Proceedings of the IEEE International Conference of Robotics and Automation*. p. 4238–4243.
- Lambert, A. and N. Le Fort-Piat (2000). Safe task planning integrating uncertainties and local maps federations. *The International Journal of Robotics Research* **19**(6), 597–611.
- Masson, F. R., J. E. Guivant, J. Nieto and E. M. Nebot (2005). The hybrid metric map: A solution for precision farming. *Latin American Applied Research* **35**, 105–110.
- Rezaei, S., J. Guivant and E.M. Nebot (2003). Car-like robot path following in large unstructured environments. In: *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2003. (IROS 2003)*. Vol. 3. pp. 2468 – 2473.
- Wang, C.C., C. Thorpe and S. Thrun (2003). Online simultaneous localisation and mapping with detection and tracking of moving objects. In: *Proceedings of the IEEE International Conference of Robotics and Automation*. p. 2918–2924.